

81 pen # 1/9

408

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 maggio 1922.

F. D'OVIDIO, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sulla trasformazione di Lorentz.* Nota del Socio C. SOMIGLIANA.

I.

L'equazione delle onde piane, se x è la direzione di propagazione e si pone $y = ct$ (ove t è il tempo e c la velocità di propagazione) può scriversi

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0$$

dove Ω rappresenta il vettore vibrante, che sarà parallelo alla direzione di propagazione, se si tratta di onde longitudinali. Se le onde sono trasversali, Ω sarà una delle due componenti normali alla direzione di propagazione.

L'equazione (1) ammette il classico integrale di D'Alembert

$$(2) \quad \Omega = f(x + y) + g(x - y)$$

ove f, g sono funzioni arbitrarie. Introduciamo ora due nuove variabili x', y' definite mediante le relazioni

$$(3) \quad x + y = \varphi(x' + y') \quad x - y = \psi(x' - y')$$

ove φ, ψ sono due nuove funzioni arbitrarie. Avremo

$$(3') \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \varphi(x' + y') + \frac{1}{2} \psi(x' - y') \\ y &= \frac{1}{2} \varphi(x' + y') - \frac{1}{2} \psi(x' - y') \end{aligned}$$

e l'integrale Ω diventerà una nuova funzione

$$\Omega_1 = F(x' + y') + G(x' - y')$$

che soddisferà ad un'equazione simile alla (1), in cui le variabili x, y saranno sostituite dalle x', y' . Perciò la trasformazione (3) dovrà lasciare invariata l'equazione (1). Facendo i calcoli si trova infatti facilmente

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y'^2} = F'(x' + y') G'(x' - y') \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right\}.$$

È chiaro poi che tutte le sostituzioni della forma (3) costituiscono un gruppo, in quanto il prodotto di due di tali sostituzioni è sempre riducibile alla stessa forma (3).

Supponiamo ora che le funzioni φ, ψ siano lineari e precisamente poniamo

$$(4) \quad x + y = a(x' + y') \quad x - y = \frac{1}{a}(x' - y')$$

ove a è una costante non mai nulla. Questa trasformazione, come è evidente, lascia invariata l'espressione $x^2 - y^2$, e si ha quindi

$$x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2.$$

Perciò concludiamo subito che la (4) non è altro che la trasformazione di Lorentz, che si presenta così come un caso specialissimo delle trasformazioni rappresentate dalle formole (3). È ben noto del resto che la trasformazione di Lorentz lascia invariata la equazione (1).

Un altro modo molto semplice per arrivare a questa trasformazione è il seguente. Nella trasformazione ortogonale (rotazione di un angolo ω)

$$x + iy = (x' + iy') e^{i\omega}$$

scambiamo fra loro y, y' , cioè poniamo

$$x + iy' = (x' + iy) e^{i\omega}$$

e avremo anche in questo caso

$$x^2 - y'^2 = x'^2 - y^2.$$

Ma noi ci atterremo alla forma (4), dalla quale si ha subito

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) x' + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) y' \\ y &= \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) x' + \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) y'. \end{aligned}$$

Per ritrovare una delle forme più consuete della trasformazione di Lorentz basta porre

$$\lambda = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \quad -1 < \lambda < 1$$

e si ha subito

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad y = \frac{\lambda x'}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{y'}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Risulta così che alla trasformazione di Lorentz si può giungere con considerazioni assai semplici, che nulla hanno a che fare con i moderni concetti della relatività, e si connettono invece naturalmente colle proprietà degli integrali dell'equazione delle onde piane. Si presenta così spontanea la domanda: *quale è il significato di questa trasformazione nella ordinaria meccanica newtoniana?*

Ora una quistione di tal fatta è già stata risolta, molto tempo prima che si parlasse di relatività, in una Memoria di Voigt del 1887 ⁽¹⁾, nella quale viene studiato e risolto il problema della propagazione delle onde, provenienti da sorgenti che si muovono uniformemente in linea retta e vien data una dimostrazione del principio di Doppler. E lo strumento di cui l'autore si serve è appunto una trasformazione lineare, che si riduce subito a quella di Lorentz ⁽²⁾. Questa Memoria non è generalmente citata nei trattati sulla relatività; vi si accenna incidentalmente nella *Relativitätstheorie* di Pauli, contenuta nella Enciclopedia delle Scienze matematiche (vol. V, 2, fasc. 4°).

La priorità del Voigt è stata riconosciuta recentissimamente dal Lorentz stesso (Acta math. 38 pag. 295), e sarebbe quindi giusto che il nome del Voigt fosse almeno associato a quello di Lorentz nella denominazione della ormai celebre trasformazione.

Per dare un'idea del procedimento di Voigt, consideriamo l'integrale corrispondente ad un sistema di onde sferiche partenti dall'origine delle coordinate, in uno spazio S,

$$\Omega = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

⁽¹⁾ W. Voigt, *Ueber das Doppler'sche Princip*. Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 10 März 1887.

⁽²⁾ La trasformazione di Voigt è la seguente:

$$\xi = x - kt \quad \tau = t - \frac{k}{\omega^2} x$$

da cui si ricava

$$\xi^2 - \omega^2 \tau^2 = \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2}\right) (x^2 - \omega^2 t^2).$$

Ponendo quindi

$$\xi = \xi' \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2}} \quad \tau = \tau' \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2}}$$

si ha

$$\xi'^2 - \omega^2 \tau'^2 = x^2 - \omega^2 t^2.$$

che soddisfa all'equazione

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = 0.$$

Se alla trasformazione di Lorentz associamo l'altra

$$(6) \quad y = y' \quad z = z'$$

otteniamo nello spazio S' delle variabili x', y', z', t' un nuovo integrale della equazione trasformata della (5) (che rimane inalterata di forma) nel quale il centro luminoso, o sonoro, anzichè fisso nella origine delle coordinate, si troverà nel punto

$$x' + \lambda ct' = 0 \quad y' = 0 \quad z' = 0$$

e si muove perciò nella direzione negativa dell'asse delle x con velocità costante λc .

Il nuovo integrale dà quindi la propagazione delle onde, quando la sorgente si muove di moto uniforme in una certa direzione, o l'osservatore si muove in quella opposta.

È questo il concetto fondamentale di Voigt. È chiaro allora che tutte le proprietà che nella teoria della relatività risultano dalla trasformazione lorentziana, sono generalmente suscettibili di una interpretazione, analoga alla precedente, di carattere nettamente newtoniano. E che per conseguenza qualunque eventuale verifica sperimentale di tali proprietà non potrà in via generale essere citata come decisiva a favore dell'una piuttosto che dell'altra interpretazione.

Così la formola

$$v = \frac{v' + \lambda c}{1 + \frac{\lambda}{c} v'} \quad \text{dove} \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad v' = \frac{dx'}{dt'}$$

che risulta dalla trasformazione di Lorentz e che è considerata come base della cinematica relativistica, non è altro, nella interpretazione newtoniana, che la formola che lega tra loro le velocità nei punti corrispondenti degli spazi S, S' . Lo stesso dicasi per le formole dell'accelerazione.

II.

Poichè la trasformazione di Lorentz non è che un caso speciale della trasformazione (3), è chiaro che molte delle precedenti considerazioni potranno essere estese prendendo per base quella trasformazione più generale.

Cominciamo intanto ad osservare che una trasformazione lineare, più generale della (4), si ha ponendo

$$x + y = a(x' + y') \quad x - y = b(x' - y')$$

ove b è una nuova costante. Anche queste trasformazioni costituiscono un gruppo. Il prodotto di due trasformazioni ha per parametri a, b i prodotti dei parametri delle due trasformazioni componenti. Poniamo ora

$$b = -\frac{1}{a} \quad a > 1.$$

Avremo la trasformazione

$$x + y = a(x' - y') \quad x - y = -\frac{1}{a}(x' - y')$$

la quale, se si pone

$$\lambda = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \quad \lambda > 1,$$

diviene

$$x = \frac{x'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \quad y = \frac{\lambda y'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \frac{y'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

analoga a quella di Lorentz, ma in cui il parametro λ deve essere maggiore dell'unità. L'interpretazione newtoniana di questa trasformazione porta alla soluzione del problema della propagazione delle onde piane, quando la sorgente, o l'osservatore, si muove con velocità in valore assoluto *maggiore di quella della luce*, poichè abbiamo pel piano $x = 0$ nello spazio S' la equazione

$$x' + \lambda ct' = 0.$$

Se chiamiamo u questa velocità, abbiamo

$$\lambda = \frac{u}{c}$$

e poichè $\lambda > 1$, una teoria, analoga a quella della relatività, basata sulle formole precedenti dovrebbe porre il postulato che *qualunque corpo si muove con velocità superiore a quella della luce*.

A questa trasformazione però non possiamo associare le (6), quando si voglia conservare l'equazione generale delle vibrazioni (5). Dovremmo porre invece

$$y = iy' \quad z = iz'$$

e avremmo allora

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2).$$

La presenza dell'immaginario porterebbe in generale a due nuovi integrali dell'equazione (5), costituiti della parte reale e della parte immaginaria della funzione trasformata.

Prendendo a base di considerazioni analoghe alle precedenti la trasformazione generale (3), e limitandoci necessariamente al caso delle onde piane,

saremmo condotti a considerare, nella interpretazione newtoniana, il problema della propagazione nel caso in cui il piano sorgente delle onde si muova con una legge determinata da un'equazione della forma

$$\varphi(x' + ct') + \psi(x' - ct') = 0$$

dove φ, ψ sono funzioni arbitrarie. Il movimento avviene quindi ancora nella direzione x , ma con una velocità non più necessariamente costante, e che può variare in infiniti modi. La corrispondente teoria relativistica dovrebbe porre il postulato della indipendenza della velocità di propagazione della luce da un movimento della sorgente rettilineo, ma non più uniforme.

Per quanto ovvie possano apparire le considerazioni svolte in questa Nota, mi è sembrato che potessero presentare un certo interesse per collocare nella sua giusta luce, dal punto di vista meccanico-analitico, la trasformazione di Lorentz, fulcro iniziale di tutta la relatività; come anche mi è sembrato potessero portare qualche contributo a quella critica delle teorie relativiste che sembra ora così opportunamente iniziata.

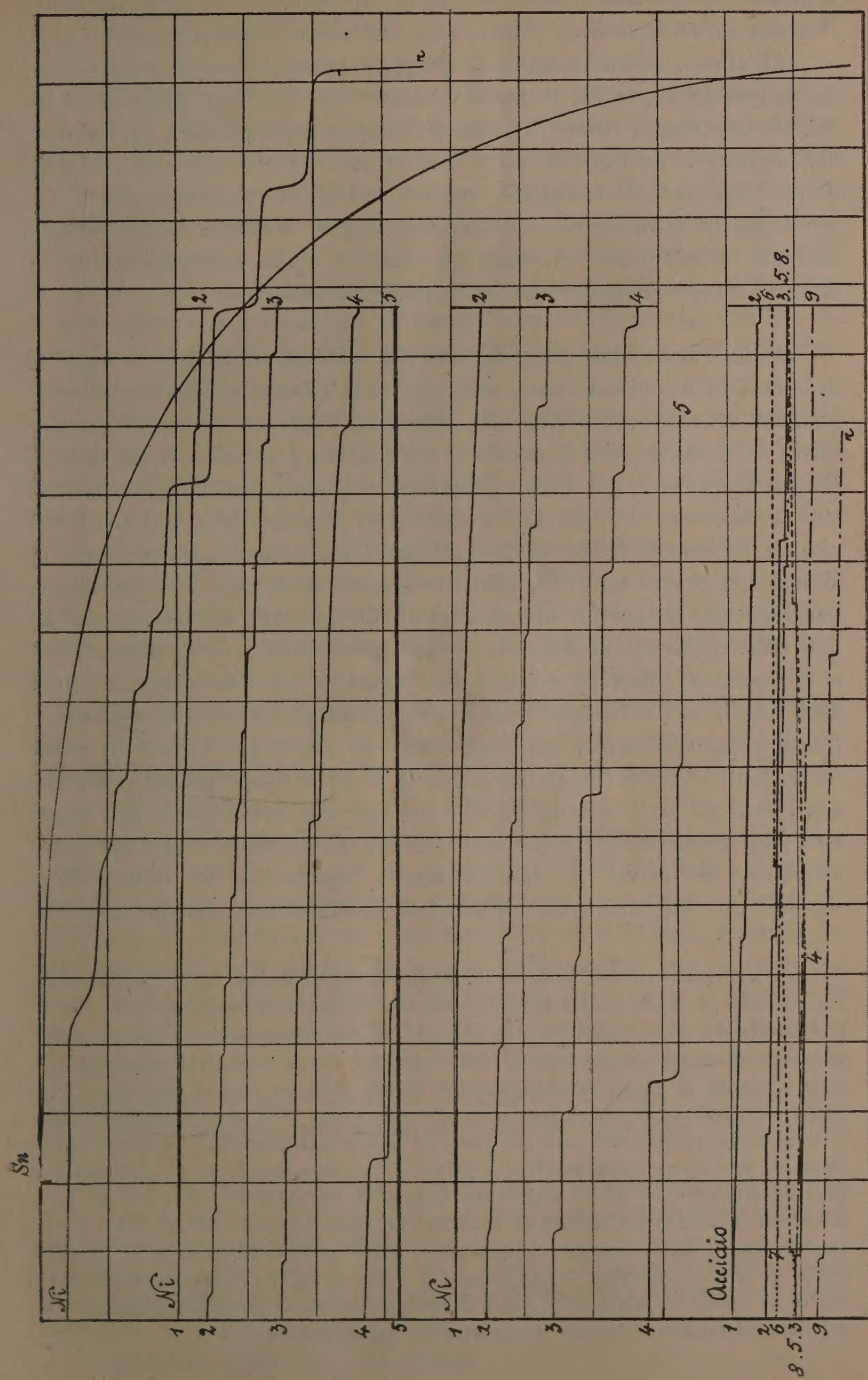
Fisico-chimica. — *Modalità sulla trazione del nichel e dell'acciaio* ⁽¹⁾. Nota del Socio M. CANTONE.

In occasione di ricerche da me eseguite sulla tenacità ⁽²⁾ ebbi modo di rilevare alcune anomalie nel comportamento del nichel ricotto e dell'acciaio crudo cementati per trazione, anomalie che credetti meritevoli di particolare esame: a tale studio si riferisce appunto la presente Nota.

La disposizione sperimentale da me adottata si discosta alquanto da quelle che ordinariamente si attuano, perchè, avendo di mira la valutazione del carico di rottura, interessava assicurarsi che i legami agli estremi dei fili cementati non ne alterassero l'uniformità di struttura o di sezione, e pertanto ricorsi al ripiego di adattare la parte media del filo in esame alla gola di una puleggina mobile, e di fermare con viti i capi del filo sopra un cilindro fisso soprastante di ugual diametro, dopo aver fatto compiere un giro sul cilindro stesso a ciascuna delle parti terminali, onde risultavano due tratti paralleli alla distanza di 16 mm. col semplice legame di forte adesione al cilindro fisso ed alla gola della puleggina. I moti di oscillazione di quest'ultima vennero soppressi mediante opportune guide, epperò queste la lasciavano libera di spostarsi verticalmente per l'azione del peso tensore,

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico dell'Università di Napoli.

⁽²⁾ I risultati di queste ricerche saranno esposti negli Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli.



costituito da una boccia della capacità di 10 litri dove si faceva pervenire il carico variabile in acqua, da apposito recipiente soprastante tarato.

All'albero, attorno al quale la puleggia poteva rotare con dolce attrito, era sospesa la boccia per mezzo di una forchetta, ed in un tratto sporgente dell'albero stesso si fissava una punta scrivente per registrare la legge di deformazione in un foglio di carta millimetrata avvolto sopra un cilindro girevole con moto di orologeria; ma nei casi in cui si aveano piccole deformazioni la parte terminale dell'albero, foggjata a coltello, poggiava sopra una leva di alluminio, provvista anch'essa di punta scrivente, al fine di ottenersi l'ingrandimento delle ordinate nel rapporto di 1 a 5.

Nichel ricotto. Per avere un'idea dei risultati relativi alla legge di deformazione del nichel ricotto sarà opportuno riferirsi ai diagrammi contenuti nell'annessa figura, dove sono fedelmente riportate alcune linee figurative fra le molte, che si ebbero in fogli adattati sul cilindro girevole ⁽¹⁾. Carattere comune a tali linee è l'andamento a gradinata nella fase di notevole cedevolezza del filo, con deformazioni brusche da 1 a 6 mm., tali cioè da far sospettare che si produca una vera rottura parziale; però se si considera che in seguito a siffatti cedimenti, siano pure di 6 mm. sopra una lunghezza dell'ordine di grandezza di 300 mm., vi è un tratto poco inclinato come nella fase di deformazione per piccoli carichi, che le discontinuità si producono ad intervalli presso a poco uguali, e che nell'insieme i vertici degli angoli vivi dei singoli gradini riescono allineati sopra una curva sensibilmente regolare, devono escludersi effetti di attrito per l'uso delle guide fra le quali scorre la puleggia inferiore. E se si tiene presente che per quasi tutti gli altri metalli, ed in molti casi con deformazioni più esagerate, non manca la continuità nel processo di stiramento, può senz'altro ammettersi nel nichel uno speciale assetto interno non del tutto stabile, ma che, per ogni manifestazione esteriore, interessa tutta quanta la massa

(³) La prima si riferisce all'oro e si ottenne coll'ingrandimento di 1 a 5: essa serve come termine di confronto per la registrazione con un metallo a comportamento regolare. La seconda dà senza ingrandimento la legge di deformazione di un filo di nichel sottoposto ad esperienza una seconda volta dopo aver subito un notevole stiramento. La terza è relativa ad un filo di nichel al quale si fece compiere un ciclo unilaterale dopo averlo sottoposto ad un carico massimo: sul tratto grosso 5-5 si sovrappongono, quasi, le linee figurative delle due metà del ciclo. La quarta si riferisce ad altro filo di nichel cementato fino ad un carico massimo, a partire da un peso tensore piccolo. L'ultima è la linea figurativa per un filo di acciaio cementato prima per forze crescenti poi per forze decrescenti fino al carico iniziale ed in ultimo per forze crescenti fino al carico di rottura: la fase di carico crescente è riprodotta a tratto continuo ed arriva al n. 4; la seconda, di carico decrescente, è punteggiata ed arriva al n. 7; l'ultima fase è riprodotta con tratti e punti ed arriva in *r*, punto di rottura come per la prima linea del nichel. Le deformazioni relative all'acciaio sono ingrandite nel rapporto di 1 a 5.

del filo invece di restare circoscritta in determinate regioni, secondo attestano il limitato decorso della fase discontinua e l'assenza d'irregolarità vera e propria nella forma dei tratti ottenuti alla rottura.

Non in tutte le serie compiute col nichel ricotto si presentò il fenomeno di cui ci siamo occupati, però si potè constatare in modo non dubbio che esso interveniva quando, per realizzare la rottura dei fili di mezzo millimetro di spessore con un carico in acqua inferiore a 10 kg., si partiva da un peso traente alquanto elevato, poichè già con un carico iniziale di 8 kg. l'anomalia spariva, o per lo meno le discontinuità erano così poco marcate da non rivelarsi coi mezzi sperimentali da me posti in opera; quindi non è da escludere che le condizioni di assetto poco stabile possano derivare da lesioni interne prodotte in tutta la massa del filo per un processo di deformazione non perfettamente statico ⁽¹⁾.

È ad ogni modo notevole che, con un andamento conforme a quello della curva che collega i vertici dei gradini, la linea figurativa del processo di deformazione senza discontinuità indichi, a pari variazione di carico, un allungamento totale non inferiore, anzi un poco superiore; onde può dirsi che le discontinuità non lascino traccia di comportamento anomalo.

Allungamenti bruschi non si ebbero mai durante l'azione di un peso tensore costante: la cosa è facile a spiegarsi ove si consideri che nel nichel ricotto, anche con dilatazioni superiori ad $\frac{1}{3}$, l'elasticità susseguente produce variazioni relative di lunghezza di qualche *millesimo* appena; epperò la constatazione fattane ha importanza, sia perchè serve a togliere il dubbio che le discontinuità possano dipendere da non perfetto legame del filo al sostegno o da cause disturbatrici atte ad agire su questo, sia perchè tende ad assodare la natura dinamica della discontinuità.

Come era facile prevedere, l'isteresi nel nichel ricotto risultò molto grande; si vide infatti che, facendo uso di un carico variabile di 10 kg. (alquanto inferiore a quello che sarebbe stato necessario per la rottura), mentre per forze crescenti si produceva un allungamento di circa 30 mm., operando per forze decrescenti ⁽²⁾ il sistema dei due fili si accorciava solo di mm. 0,2 e, col ritorno al carico massimo, valore assoluto non diverso si avea per il corrispondente aumento di lunghezza. In tali condizioni non si apprezzava nel ciclo unilaterale alcuna traccia delle discontinuità così notevoli nella primitiva azione del carico in acqua, in quanto che queste si rivelano sempre in misura adeguata alle deformazioni compressive e tutto induce a con-

(1) Vuolsi qui ricordare che anche nell'applicazione del carico iniziale si procurava di procedere gradualmente, ma non poteva certo evitarsi che il filo subisse una notevole deformazione in un tempo assai piccolo.

(2) La diminuzione graduale del carico si operava col passaggio dell'acqua dalla boccia al serbatoio soprastante, dove si produceva l'aspirazione lenta per mezzo di apposita pompa.

siderare il comportamento del nichel ricotto nei cicli unilaterali come di sostanza elastica perfetta non molto diversa dalla originaria sotto l'azione di piccole forze esterne. Del resto la piccolezza stessa delle deformazioni nei cicli unilaterali anzidetti porta ad escludere una sensibile trasformazione in calore dell'energia meccanica in giuoco, trasformazione che appare invece legata in modo particolare alle discontinuità del processo elastico nel caso in cui queste si presentano; sicchè viene sempre meglio affermandosi il concetto che le grandi deformazioni del nichel ricotto, anche se accompagnate da saltuari cedimenti bruschi, non lascino effetti residui di eterogeneità nella struttura interna del metallo.

Acciaio crudo. — L'acciaio usato per queste ricerche è di ottima qualità e presenta uno spessore di mm. 0,225. Per forze deformatrici non grandi si comportò come sostanza perfettamente elastica, con un modulo di trazione di 22.000 kg. per mm.q.; ma con carichi superiori a 9 kg. si riottennero le anomalie riscontrate nel nichel, e con regolarità maggiore: nei diagrammi ottenuti coll'ingrandimento di 1 a 5 comparvero infatti, ad intervalli di circa 1 kg. di carico, gradini di altezza compresa fra 0,2 e 0,3 mm.; ed in tal modo con un carico in acqua di 10 kg. si ottenne per i salti un valore complessivo di mm. 2,4 sopra un allungamento totale apparente di mm. 12,5; per cui risultò il fatto interessante di una deformazione complessiva inerente ai tratti nei quali si svolgeva il processo continuo, con un valore del modulo quale si dedusse nella fase di perfetta elasticità, come se i salti (più netti che nel caso del nichel) rappresentassero semplici lacune istantanee in un processo perfettamente elastico e prive d'influenza su questo. Ad uguali deduzioni ero condotto nel precedente studio sul nichel; ma nel caso attuale, avendosi da fare con un metallo assai meno cedevole, era consentita una ricerca di carattere quantitativo con criterio più sicuro, per quanto meno facile fosse la valutazione; epperò sta il fatto, interessante a mio modo di vedere, che sotto il medesimo aspetto si manifestino le deviazioni dalla legge di Hooke in due metalli, come il nichel ricotto e l'acciaio crudo, i quali, pur possedendo lo stesso modulo di trazione, stanno agli antipodi per quanto riguarda l'apparente cedevolezza ai grandi sforzi di trazione, perchè, di fronte ad una dilatazione longitudinale complessiva di 0,352 in fili di nichel di mezzo millimetro di spessore, se ne ha una di circa 0,0075 in un filo di acciaio crudo del diametro di mm. 0,225.

Nè può non rilevarsi che nell'acciaio i gradini assumono altezza maggiore a misura che cresce il peso a partire dal quale si fa agire il carico in acqua: così, mentre partendo da 8 kg. si erano avuti sul foglio salti per un ammontare complessivo di mm. 2,4 sopra un abbassamento totale della punta scrivente di mm. 12,5, con un peso tensore iniziale di 11 kg. in tre serie successive con fili identici al primo, cimentati fino alla rottura, si

ottennero per le somme delle altezze dei gradini (ugualmente distanziati) i valori di mm. 6,4 6,6 6,5 in corrispondenza agli abbassamenti complessivi della punta di mm. 16,2 16,0 16,0; e siccome questi sistemi di valori si riferiscono nelle tre ultime serie ad un carico in acqua di circa kg. 9,5, si arriva al risultato che, non ostante il grande divario del peso iniziale e le conseguenti nette deviazioni dalla legge di Hooke quando si giunge al carico di rottura, in corrispondenza a 10 kg. di maggior peso tensore si riottterrebbe lo stesso allungamento *effettivo* di 2 mm. che si era riscontrato per i puri allungamenti elastici nella serie primitiva non tenendo conto delle discontinuità; e ciò importa che nei fili di acciaio crudo da me cimentati le deviazioni dalla legge di Hooke sarebbero da attribuire agli speciali processi di carattere quasi istantaneo. Nel nichel una legge così semplice non esiste, perchè deviazioni dalla legge di Hooke, e crescenti col carico, si verificano anche negl'intervalli fra due salti successivi; ma riescono sempre di entità *relativamente* piccola.

E per quanto riguarda i fenomeni d'isteresi abbiamo nell'acciaio crudo un fatto assai strano che non si verifica nel nichel ricotto, e cioè la presenza di discontinuità quando si procede per forze decrescenti fino al carico iniziale, nel senso di accorciamenti e per un ammontare complessivo più piccolo in valore assoluto di quello prodotto dal primo carico crescente in acqua, ma pressocchè uguale all'allungamento avutosi nella successiva seconda metà del ciclo unilaterale. Si avrebbe dunque una tendenza alla sovrapposizione delle due linee figurative delle due metà del ciclo compiuto a partire dallo stato di massima deformazione, sicchè, considerata la cosa dal punto di vista energetico. se si suppone (come appare legittimo) che al brusco allungamento corrisponde uno sviluppo di calore, dovrebbe ammettersi nel rapido accorciamento un lavoro fatto a spese dell'energia interna; e se fosse lecito parlare nel primo caso di molecole che si rendono libere, sarebbe da ammettere nel secondo il ritorno ai legami della primitiva rigidità con perdita della forza viva acquistata nella fase dell'opposto processo dinamico.

Ad ogni modo le discontinuità riscontrate nel senso cui corrisponde il sollevamento del peso tensore costituiscono la prova più convincente della reale esistenza delle discontinuità, come insite alle proprietà elastiche delle due sostanze prese qui in particolare esame, perchè, se cause disturbatrici di natura estranea al processo elastico possono provocare l'abbassamento di un grande peso tensore, è assai difficile concepire un effetto delle medesime cause nel senso di un innalzamento.

I fenomeni di cui ci siamo occupati non appaiono in altri metalli: si rivela per alcuni un andamento ondulato nelle linee rappresentatrici, e talvolta con indizio di periodicità, o qualche punto angoloso che accenna ad una variazione brusca di regime; laddove per altri, come per l'oro ad es., si manifesta un andamento continuo e molto regolare; tuttavia non può

escludersi che le anomalie avanti studiate siano d'indole generale e che si rendano sensibili in alcuni casi soltanto, vuoi per maggiore ampiezza dell'effetto, vuoi per minore frequenza. Ma, anche se circoscritti a pochi metalli, non possono non attirare l'attenzione dei fisici, perchè il loro esame potrebbe mettere in nuova luce alcune modalità delle imperfezioni elastiche facendone risaltare il carattere dinamico in rapporto con una periodica instabilità di struttura lungo il processo di deformazione.

Non si può dare termine a questa comunicazione senza tener conto delle interessanti ricerche di Barkhausen van der Pol Jr., Weiss e Ribaud ⁽¹⁾, dalle quali risulta che per gl'intervalli di forze magnetizzanti cui corrispondono valori assai elevati della suscettività differenziale nei cicli magnetici, ossia nelle fasi in cui si determina la irreversibilità dei processi magnetici, il ferro, la magnetite e le leghe di ferro e nichel accusano variazioni brusche accidentali dell'intensità magnetica, pur con variazioni continue nel campo. E risulta del pari, dallo studio esteso ed accurato di van der Pol, che le correnti indotte rivelatrici del fenomeno si producono simultaneamente per punti a notevole distanza lungo il filo sottoposto ad esperienza, e che le discontinuità non mancano quando intervengono ripetuti cicli di trazione, torsione, o flessione atti a modificare il magnetismo residuo dei fili in esame. I fenomeni da me studiati, qualora siano posti in rapporto con quelli dei quali ora si è fatto cenno, acquistano un particolare rilievo: non voglio con ciò dire che le discontinuità nel processo elastico, perchè riscontrate da me in modo netto in due metalli magnetici, si debbano essenzialmente alle proprietà magnetiche; ritengo piuttosto che le modalità accertate nel caso del magnetismo dipendano dalle condizioni elastiche reali, che nelle mie esperienze si rendono manifeste anche in assenza di forze magnetiche; ed in tale ipotesi il fatto scoperto da Barkhausen, col carattere di una struttura *quantistica* dell'energia messa in giuoco nei processi irreversibili, sarebbe da considerare come appartenente alla vasta categoria dei fenomeni magnetoelastici.

(¹) V. Journ. de Phys, T. III, p. 74, 1922.

Geometria. — *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione.* Nota I del Corrispondente LUIGI BERZOLARI.

In un lavoro, di prossima pubblicazione, *Sulle cubiche gobbe invarianti simultanee rispetto ad un gruppo ottaedrico di collineazioni quaternarie*, mi si è presentato un particolare complesso del quarto grado, il quale gode della proprietà che tutti i suoi coni hanno carattere lemniscatico, cioè sono dotati di tre generatrici ad un tempo doppie e d'inflexione. Il complesso risulta determinato, e può generarsi direttamente in modo assai semplice, quando sian dati tre complessi lineari a due a due in involuzione.

In questa Nota e nelle successive espongo, insieme con tale generazione, quelle proprietà del complesso che hanno maggior legame col lavoro cui ho accennato; inoltre alcune osservazioni generali sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due involutorii. Figura tra essi un altro complesso del quarto grado, che pure ammette una semplice generazione geometrica.

1. Com'è noto, le equazioni di tre complessi lineari K_1, K_2, K_3 a due a due in involuzione si possono scrivere, in coordinate p_{ik} di Cayley-Plücker, sotto la forma

$$(1) \quad K_1 \equiv p_{12} - p_{34} = 0, \quad K_2 \equiv p_{31} - p_{24} = 0, \quad K_3 \equiv i(p_{31} + p_{24}) = 0,$$

nell'ultima delle quali il fattore $i (= \sqrt{-1})$ è posto per la simmetria di alcune tra le formole che seguiranno.

Le rette comuni ai tre complessi costituiscono un regolo S della quadrica Q che ha per equazione locale

$$(2) \quad Q \equiv x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0,$$

e per equazione in coordinate di rette tangenti

$$(3) \quad K \equiv K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 0.$$

Le coppie di direttrici $d_1, d'_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3$ delle congruenze lineari, in cui ordinatamente si tagliano K_2 e K_3 , K_3 e K_1 , K_1 e K_2 , appartengono all'altro regolo S' di Q , e in esso si separano a due a due armonicamente.

Una generatrice qualunque di S' ha equazioni della forma

$$(4) \quad x_1 - \lambda x_4 = 0, \quad \lambda x_2 - x_3 = 0,$$

dove λ è un parametro. In particolare, le $d_1 d'_1$, $d_2 d'_2$, $d_3 d'_3$ possono rispettivamente rappresentarsi con le equazioni

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0, \quad x_4 = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_3 = 0; \\ x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 - x_4 = 0; \quad x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_4 = 0; \\ x_2 - i x_3 = 0, \quad x_1 + i x_4 = 0; \quad x_2 + i x_3 = 0, \quad x_1 - i x_4 = 0. \end{array} \right.$$

La polarità rispetto a Q è permutabile con ciascuna delle polarità nulle

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i+1)x_1 + (1+\sqrt{3})x_4 = 0, \quad (i-1)x_2 + (1-\sqrt{3})x_3 = 0; \\ (i-1)x_1 - (1-\sqrt{3})x_4 = 0, \quad (i+1)x_2 - (1+\sqrt{3})x_3 = 0; \\ (i-1)x_1 + (1-\sqrt{3})x_4 = 0, \quad (i+1)x_2 + (1+\sqrt{3})x_3 = 0; \\ (i+1)x_1 - (1+\sqrt{3})x_4 = 0, \quad (i-1)x_2 - (1-\sqrt{3})x_3 = 0, \end{array} \right.$$

e le e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 con quelle che si deducono dalle precedenti cambiando segno a $\sqrt{3}$.

3. Ciò posto, in questo numero e nei due successivi conviene, per il seguito, premettere alcune osservazioni a proposito di certe quadriche, che restano determinate ogniqualvolta con i complessi K_1, K_2, K_3 sia assegnata anche una retta r .

Anzitutto, le reciproche di r rispetto ai complessi della rete individuata da K_1, K_2, K_3 formano una congruenza lineare passante per r , di cui sono direttrici le due rette di S appoggiate alla stessa r . Se dunque si costruiscono le reciproche di r rispetto a K_1, K_2, K_3 , la quadrica R da esse determinata (che si dirà *quadrica corrispondente ad r*) incontrerà Q secondo due generatrici di S e due di S' .

Dicendo p_{ik} le coordinate di r , si trova che la quadrica è rappresentata da

$$(9) \quad R \equiv (p_{12} - p_{34}) (p_{23} p_{31} x_1^2 + p_{14} p_{24} x_2^2 - p_{31} p_{14} x_3^2 - p_{23} p_{24} x_4^2) \\ + (p_{12}^2 - p_{34}^2) (p_{31} x_3 x_1 - p_{24} x_2 x_4) \\ + (p_{31}^2 - p_{24}^2) (p_{14} x_2 x_3 - p_{34} x_1 x_2 - p_{23} x_1 x_4 - p_{12} x_3 x_4) = 0.$$

In luogo di r considerando la sua reciproca r' rispetto a Q , la quadrica R' ad essa corrispondente ha un'equazione $R' = 0$, che si deduce dalla precedente scambiando tra loro p_{12} e p_{34} nel quadriminomio per il quale è moltiplicata la differenza $p_{31}^2 - p_{24}^2$ ⁽¹⁾. Ne segue l'identità

$$R - R' = (p_{12} - p_{34}) (p_{31}^2 - p_{24}^2) Q,$$

(1) Per un'osservazione fatta al n. 1, le rette reciproche di r' rispetto a K_1, K_2, K_3 sono altresì le coniugate di r nelle involuzioni rigate che hanno per assi $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$.

epperò :

Le quadriche R, R' corrispondenti a due rette r, r' reciproche rispetto a Q si tagliano in un quadrilatero, determinando un fascio-schiera al quale appartiene Q .

4. Essendo ancora r una retta di coordinate p_{ih} , le quadriche A_1, A_2, A_3 passanti per r e risp. per le coppie di rette $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$ tagliano ulteriormente Q nelle due generatrici di S che si appoggiano ad r , e sono altresì i luoghi delle rette reciproche di r rispetto ai complessi lineari dei fasci determinati da K_2 e K_3 , K_3 e K_1 , K_1 e K_2 . Esse hanno per equazioni

$$A_1 \equiv -2(p_{34} x_1 x_2 - p_{14} x_2 x_3 + p_{23} x_1 x_4 + p_{12} x_3 x_4) = 0,$$

$$A_2 \equiv p_{23} x_1^2 + p_{14} x_2^2 - p_{14} x_3^2 - p_{23} x_4^2 + (p_{31} - p_{24})(x_1 x_2 - x_3 x_4) + (p_{12} + p_{34})(x_1 x_3 - x_2 x_4) = 0,$$

determinate da K_1, K_2, K_3 , ed i suoi prodotti per queste sono rispettivamente le involuzioni rigate che hanno per assi le coppie di rette $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$.

2. Assumendo S' come campo binario, risulta in esso determinata una involuzione sizigetica J , della quale $d_i d'_i$ sono gli elementi doppi, e che ha l'equazione

$$(6) \quad \lambda^4 + 6\varrho\lambda^2 + 1 = 0,$$

dove λ è il parametro che entra nelle equazioni (4) d'una generatrice di S' , e ϱ è un altro parametro, da cui sono determinati i singoli gruppi dell'involuzione.

Appartengono a questa tre gruppi armonici $a_1 a_2 a_3 a_4, a'_1 a'_2 a'_3 a'_4, a''_1 a''_2 a''_3 a''_4$, e due gruppi equiarmonici $e_1 e_3 e_3 e_4, e'_1 e'_2 e'_3 e'_4$.

Convenendo che i tre primi siano rispettivamente *coordinati* alle coppie $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$, nel senso che queste in S' separino armonicamente le due coppie di generatrici coniugate in quei gruppi armonici, le generatrici di tali gruppi si possono rappresentare con le equazioni

$$(7) \quad \begin{cases} \pm \sqrt{2} x_1 + (i-1) x_4 = 0, & \pm \sqrt{2} x_2 - (i+1) x_3 = 0; \\ \pm \sqrt{2} x_1 + (i+1) x_4 = 0, & \pm \sqrt{2} x_2 - (i-1) x_3 = 0; \\ \begin{cases} i x_1 - (1 \pm \sqrt{2}) x_4 = 0, & i x_2 - (1 \mp \sqrt{2}) x_3 = 0; \\ i x_1 + (1 \pm \sqrt{2}) x_4 = 0, & i x_2 + (1 \mp \sqrt{2}) x_3 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 - (1 \pm \sqrt{2}) x_4 = 0, & x_2 + (1 \mp \sqrt{2}) x_3 = 0; \\ x_1 + (1 \pm \sqrt{2}) x_4 = 0, & x_2 - (1 \mp \sqrt{2}) x_3 = 0, \end{cases} \end{cases}$$

dove due generatrici coniugate d'un gruppo armonico si ottengono scegliendo, nelle rispettive equazioni, una volta i segni superiori e un'altra i segni inferiori.

Per i due gruppi equianarmonici si riterrà che le generatrici e_i ed e'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) siano tra loro *omologhe* secondo una proprietà che recentemente ho rilevata ⁽¹⁾. Le rette e_1, e_2, e_3, e_4 si possono allora rappresentare con le equazioni

$$A_3 \equiv i[p_{23} x_1^2 - p_{14} x_2^2 - p_{14} x_3^2 + p_{23} x_4^2 + (p_{31} + p_{24})(x_1 x_2 - x_3 x_4) + (p_{12} + p_{34})(x_1 x_3 + x_2 x_4)] = 0.$$

Se al posto di r si assume la sua reciproca r' rispetto a Q , si ottengono similmente tre quadriche A'_1, A'_2, A'_3 , le cui equazioni si deducono dalle precedenti scambiando tra loro p_{12} e p_{34} e inoltre, nella seconda e terza equazione, mutando segno al termine contenente la differenza $x_1 x_2 - x_3 x_4$. Si hanno quindi le identità

$$\begin{aligned} A_1 - A'_1 &= 2(p_{12} - p_{34}) Q, \\ A_2 - A'_2 &= 2(p_{31} - p_{24}) Q, \\ A_3 - A'_3 &= 2i(p_{31} + p_{24}) Q. \end{aligned}$$

donde segue che le quadriche A_1 e A'_1, A_2 e A'_2, A_3 e A'_3 determinano tre fasci-schiere, che tutti contengono Q .

La rete individuata da A_1, A_2, A_3 ha per basi la retta r e le due generatrici di S appoggiate ad r (e ad r').

Quattro altre quadriche F_1, \dots, F_4 della stessa rete sono quelle passanti per r e per le coppie di rette $e_1 e'_1, \dots, e_4 e'_4$, ed hanno le equazioni

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv -A_1 + A_2 + A_3 = 0, & F_2 &\equiv A_1 - A_2 + A_3 = 0, \\ F_3 &\equiv A_1 + A_2 - A_3 = 0, & F_4 &\equiv A_1 + A_2 + A_3 = 0. \end{aligned}$$

5. Quando r , è perciò anche r' , sta in K_i , e in questo caso soltanto, le R, R', A_i e A'_i ($i = 1, 2, 3$) coincidono, dando luogo ad una quadrica che, come luogo e come inviluppo, è apolare a Q . Se, ad es., r ed r' stanno

(1) Ved. la mia Nota *Sulle forme binarie del quarto ordine*, Rend. del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. 54 (1921), p. 225. La proprietà consiste in ciò, che tra gli elementi dei due gruppi equianarmonici contenuti in un'involuzione sizigetica si può, in un modo solo, stabilire una corrispondenza biunivoca tale, che ogni elemento dell'un gruppo e i tre non omologhi dell'altro costituiscono alla loro volta un gruppo equianarmonico. Sono così otto i nuovi gruppi equianarmonici che si possono costruire con gli elementi dei due gruppi considerati.

Di due elementi omologhi, ognuno è pure il gruppo polare di prim'ordine dell'altro rispetto alla sestupla degli elementi doppi dell'involuzione. Due tali elementi omologhi sono inoltre uniti per una delle otto omografie cicliche a periodo 3 (a due a due inverse) appartenenti al gruppo ottaedrico delle omografie che trasformano la detta sestupla in sè.

in K_1 , le due coppie di piani del fascio-schiera determinato da tale quadrica e da Q sono rappresentate da

$$R \pm Q(p_{31}^2 - p_{24}^2) \sqrt{-p_{31} p_{24}} = 0,$$

cosicchè, entro il fascio, separano armonicamente R e Q ⁽¹⁾.

Una retta che appartenga ad uno dei complessi K_1, K_2, K_3 è inoltre tale che incontra Q e la quadrica corrispondente in due coppie armoniche di punti. Lo stesso avviene di ogni retta r tangente a Q , in quanto essa tocca nello stesso punto anche la quadrica corrispondente. Infatti, dicendo y il punto di contatto di r con Q , la quadrica corrispondente ad r ha in comune con Q due generatrici di S' (tra loro distinte, a meno che y non giaccia sopra una delle rette e_i, e'_i) e la generatrice di S uscente da y , contata due volte. Nè vi sono altre rette che godano della proprietà indicata; in altri termini:

Tutte e sole le rette dei complessi K_1, K_2, K_3 e quelle tangenti alla quadrica Q hanno la proprietà d'incontrare Q e la quadrica corrispondente in due coppie armoniche di punti.

Se invece r , e quindi anche r' , incontra una delle rette d_i, d'_i , e solamente in questo caso, ognuna delle R, R', A_i, A'_i si scompone in due piani. Di tali piani, uno fa parte di R e di A_i , un altro fa parte di R' e di A'_i , e gli altri due piani di cui constano R ed A_i , come pure gli altri due di cui constano R' ed A'_i , incontrano l'altra delle d_i, d'_i in uno stesso punto. Se infatti r ed r' tagliano, per es., d'_1 , sicchè $p_{31} = 0$, e si pone

$$\alpha = p_{23} x_1 + p_{12} x_3, \quad \beta = p_{14} x_2 - p_{12} x_4,$$

$$\alpha' = p_{23} x_1 + p_{34} x_3, \quad \beta' = p_{14} x_2 - p_{34} x_4,$$

si ha, a meno di fattori costanti,

$$A_1 = \alpha \beta, \quad A'_1 = \alpha' \beta',$$

$$R = \beta [p_{14} p_{24} \alpha - p_{12} (p_{12} - p_{34}) \beta'],$$

$$R' = \beta' [p_{12} p_{24} \alpha' + p_{23} (p_{12} - p_{34}) \beta].$$

⁽¹⁾ Ciascuna delle R e Q è polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra. Le due quadriche sono pertanto, secondo la denominazione di R. Sturm, *harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt*: cfr. anche per citazioni, la mia Nota *Sul significato geometrico di alcune identità lineari tra quadrati di forme algebriche*, Rend. del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 51 (1918), p. 431.

Meccanica. — *Sull'influenza del rapporto tra volume e superficie nelle aeronavi.* Nota del Corrisp. G. A. CROCCO.

In una precedente Nota (1) abbiamo già indicato l'influenza del rapporto tra volume e superficie nelle aeronavi per quanto ha tratto alla *potenza motrice* necessaria ad imprimer loro una data velocità ed ai *consumi* di combustibile necessari a navigare un dato numero di ore. Abbiamo anche mostrato come il conseguente guadagno in forza ascensionale, che si ottiene accrescendo le dimensioni, sia in parte assorbito da necessità strutturali; ma come entro certi limiti, che abbiamo precisato, rimanga anche in parte disponibile sotto forma di carico utile.

Ma il rapporto tra volume e superficie, e cioè le dimensioni, influiscono su altre caratteristiche secondarie delle aeronavi, che nella presente Nota vogliamo succintamente indicare.

Anzitutto è da osservare che insieme col peso delle installazioni motrici variano i pesi di tutti i loro *servizi accessori* come ponti, sospensioni, ricambi, equipaggi; ed insieme col peso del combustibile variano le capacità occorrenti a contenerlo e rifornirlo, e i consumi di gas leggero necessari ad ogni viaggio: in altri termini tutta la complessa organizzazione dei *rifornimenti* e relativi impianti fissi occorrenti a un regolare traffico di viaggiatori.

Variano anche nella stessa vantaggiosa misura quelle *installazioni di bordo* e fisse preconizzate per ridurre o sopprimere i detti rifornimenti di gas, e cioè per recuperare sotto forma di zavorra acquee il peso di combustibile consumato durante il viaggio, o per far variare termicamente la corrispondente forza ascensionale necessaria a sostenerlo: e ciò perchè l'entità di entrambi questi dispositivi è proporzionale alla potenza motrice, e quindi la percentuale di peso occorrente diminuisce col crescere delle dimensioni sino a raggiungere aliquote praticamente realizzabili.

Altri guadagni dipendono direttamente dalla superficie dell'involucro, e si ripercuotono sia sul peso della struttura sia sulla sua solidità locale, sia su fenomeni connessi.

(1) Questi Rendiconti: seduta 2 aprile 1922. *Limiti strutturali ed economici nelle dimensioni delle aeronavi.*

Il peso degli involucri va infatti suddiviso in due parti: una dedicata alla resistenza, l'altra alla ermeticità. La prima cresce in misura maggiore che non i volumi e cagiona pertanto un maggiore assorbimento della forza ascensionale residua, segnalato nella nostra precedente Nota: la seconda potrebbe a rigore variare in ragione della superficie e costituire termine di compenso. Ciò noi avevamo supposto alcuni anni or sono; ma non abbiamo creduto, da un punto di vista pratico, di ammettere nella citata Nota; ove invece si è fatta l'ipotesi che la parte di peso di stoffa, gomma, *baudruche* o vernice, riserbata a trattenere il gas non rimanga unitariamente costante, ma cresca in ragion diretta delle dimensioni. Questa ipotesi conduce a una maggiore *robustezza locale* del tessuto, a una maggiore durata, e a una minore *perdita osmotica* unitaria.

La perdita osmotica unitaria è da ritenere infatti connessa colla quantità di sostanza impermeabilizzante, nel senso che i tempi necessari a far passare attraverso l'unità di superficie un determinato volume di gas sono proporzionali alla quantità suddetta. Ne segue che considerando l'insieme della superficie di un dirigibile, costruito secondo la precedente ipotesi, le percentuali di lavaggio occorrenti giornalmente per mantenere una determinata purezza variano in ragione inversa del quadrato delle dimensioni. Così ad esempio in un dirigibile da 12 tonnellate di forza ascensionale l'idrogeno dovrebbe venire completamente rinnovato in poco più di un mese per mantenere la purezza di $\frac{19}{20}$; mentre in un dirigibile da 120 tonnellate il rinnovamento si richiederebbe ogni cinque mesi circa. Ad una più grossa unità, per es. 500 tonnellate, basterebbe un rinnovamento annuo. Per il gas elio i tempi di rinnovamento sono circa doppi.

Dipendono altresì dalla superficie dell'involucro gli appesantimenti eventuali dovuti durante il viaggio alle *vicissitudini meteorologiche*, come pioggia e neve. Il sopraccarico dovuto alla pioggia che può ad esempio raggiungere il 16 % in un tipo da 12 tonn., discende a meno del 9 % in un tipo da 120 tonn., e al 5 % in un tipo da 500. Così dicasi delle variazioni di forza ascensionale dovute a *brusche variazioni di temperatura*. A parità di durata del fenomeno, esse comunicano alla massa del gas, attraverso la superficie dell'involucro, una quantità di calore proporzionale alla superficie, e quindi una variazione di temperatura, e conseguentemente di forza ascensionale, in ragione diretta del rapporto tra superficie e volume, cioè in ragione inversa delle dimensioni.

Un effetto analogo producono le *raffiche del vento* durante la marcia. A parità d'intensità e di durata, esse comunicano alla massa del dirigibile una quantità di moto proporzionale alla sezione maestra, e quindi una variazione di velocità in ragione inversa delle dimensioni. La sensibilità dell'aeronave alle perturbazioni esterne è perciò tanto minore quanto maggiore è il suo tonnellaggio. Contemporaneamente decresce nella stessa misura relativa

la *sensibilità al governo dinamico*, e l'azione frenante dell'aria nell'arresto e nella discesa. Cosicchè le grandi navi aeree sono necessariamente più lente nelle manovre; e la manovra dinamica cede sempre più posto a quella statica.

La variazione delle reazioni dell'aria proporzionalmente alle superfici conducendo a forze perturbatrici e di impennaggio varianti col quadrato delle dimensioni, ne segue che a parità di velocità i pesi degli organi di irrigidimento e di impennaggio variano come il cubo delle dimensioni, epperò la loro percentuale rimane costante; ed i momenti di questi pesi variano come la quarta potenza ed esigono strutture più pesanti.

Ma per quanto concerne i *momenti delle forze perturbatrici e stabilizzanti*, come per i momenti dovuti alle azioni dei timoni di quota e di evoluzione, risulta invece una variazione secondo il cubo delle dimensioni; onde il peso della parte delle strutture destinata a resistere a questi momenti varia anch'esso come i cubi, e la sua percentuale si mantiene costante; secondo quanto abbiamo supposto nella nostra precedente Nota. Ne deriva anche che la *stabilità di marcia* migliora, poichè le coppie statiche variano in misura maggiore dei volumi: e il valore della « velocità critica » diviene sempre più elevato col crescere delle dimensioni.

Così anche i *tempi di oscillazione*, sempre a parità di velocità di marcia, variano in ragion diretta delle dimensioni.

Una singolare menzione meritano, per la vitalità e la pratica delle grandi aeronavi, le manovre di *atterraggio* e di *ormeggio*. Mentre infatti tali manovre sono affidate nelle piccole aeronavi al criterio dei comandanti e alla forza muscolare di allenate squadre, nelle grandi navi aeree esse si compiranno con metodi e dispositivi preparati e con forza meccanica. Ciò è reso possibile precisamente dal diminuito rapporto fra superficie e volume, sia per le maggiori disponibilità relative ed assolute sia per quanto passiamo a chiarire. Venendo infatti a connettersi col suolo, dopo avere annullato la sua velocità di marcia relativamente ad esso, il dirigibile rimarrà soggetto a due forze antagoniste: da una parte quella del vento che tenta spingerlo nella sua direzione ed in direzioni ad essa normali, e d'altra parte quella delle connessioni, facenti capo alla struttura, ed opponendosi alla spinta del vento. La prima, a parità di assetto, varia come la superficie presentata; cosicchè se le connessioni non generano momenti importanti, tutto il peso di esse e della parte resistente della struttura varia come la forza agente e guadagna in rapporto alla forza ascensionale disponibile.

Il vantaggio diviene ancor più evidente se — come è prevedibile — le connessioni stesse siano principalmente attivate da una determinata aliquota di forza ascensionale resa libera al momento opportuno.

In particolare nell'*atterraggio*, lanciato il cavo di manovra e lasciandolo fissare a punti predisposti del terreno, si creerà su di questo una tensione

proporzionale alla forza del vento che consenta al dirigibile di assumere una stabile posizione di aerostato frenato e di venir richiamato a terra senza eventualità di abbattimenti o di urti. La robustezza del cavo sarà quindi proporzionale alla forza del vento e, a parità di lunghezza, anche il suo peso.

Così anche il peso dei verricelli di ricupero installati a bordo e degli organi motori relativi. Così anche il peso della *zavorra d'atterraggio* predisposta a prora in corrispondenza dell'attacco del cavo, e gettata a momento prestabilito per creare su di questo una forza ascensionale statica, in aggiunta alla eventuale dinamica.

Queste considerazioni sono per certo di natura teorica, giacchè se la lunghezza del cavo fosse proporzionale alle dimensioni, il suo peso varierebbe per contro proporzionalmente ai volumi, e così l'ingombro dei verricelli e l'energia motrice totale necessaria a recuperarlo. Così anche se si generassero momenti di flessione importanti, questi attenuerebbero i benefici innanzi indicati. I quali, come in ogni altro ramo della meccanica, richiedono un'applicazione accorta e geniale.

Ad analoghe osservazioni dà luogo la manovra di *ormeggio*. Se non c'è ricovero, essa consiste nel connettere il dirigibile sul terreno in modo che possa liberamente orientarsi al vento. Il sistema più sicuro è quello di fissarlo per tutta la sua lunghezza a una piattaforma girevole, provvista di mezzi per orientarsi ⁽¹⁾. Le connessioni con questa piattaforma a parità di vento seguono allora la legge delle superfici. Così anche le forze *ascensionali d'ormeggio* eventualmente rese libere per attivare le connessioni suddette.

Se c'è ricovero, la piattaforma girevole, anzichè presentarsi al vento, è destinata a disporsi secondo l'asse del ricovero per portarvi il dirigibile e questo può dunque venire investito di fianco. Anche in tal caso, e sempre a parità d'intensità di vento, le forze abbattenti sono proporzionali alle superficie: cosicchè l'entità delle connessioni e le forze ascensionali d'ormeggio variano nella stessa misura. Così anche i sovraccarichi di cui debba eventualmente zavorrarsi la piattaforma.

Per quanto concerne i momenti flettenti generati nelle suddette manovre, esse seguono in generale la legge dei cubi, epperchè non appesantiscono le aliquote delle strutture che sono destinate ad assorbirne i tormenti.

Può quindi asserirsi, concludendo, che anche nella maggior parte delle questioni accessorie, ma vitali per la pratica delle aeronavi, l'aumento delle dimensioni si presenta vantaggioso: e, là dove non c'è vantaggio, esso non trova ostacoli di principio.

(1) Ideata nel 1913: Brev. n. 138061.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Mineralogia. — *Sulla celestite del calcare madreporico della Provincia di Messina* ⁽¹⁾. Nota I del dott. FRANCESCO RANFALDI, presentata dal Corrisp. F. ZAMBONINI.

Già da vari anni, io ho rinvenuto dei cristalli di celestite in due distinte località della provincia di Messina, e, precisamente, nel calcare a corallari delle colline di Tremonti, dove la celestite tappezza le pareti di alcune piccole geodi, ed i calcari del vallone Marro, presso Rometta, nei quali i cristallini di celestite furono trovati impiantati sui coralli fossili.

La celestite, tanto frequente nella formazione solifera siciliana, non è stata, finora, almeno per quanto io so, trovata nella provincia di Messina. Mi è sembrato, perciò, opportuno descrivere brevemente i cristalli di Tremonti e del vallone Marro, non solo perchè appartengono a due nuove località, ma anche per le loro condizioni di giacitura, ben diverse da quelle solite della celestite siciliana, che non è stata mai osservata nei polipai fossili.

CELESTITE DI TREMONTI.

Le colline di Tremonti e di S. Iachino si ergono a qualche chilometro a nord di Messina, e la loro ossatura è costituita da un calcare, ora friabile, ora compatto o concrezionato, del quale si sono occupati vari autori, e, più particolarmente, G. Seguenza, Cortese e Baldacci, i quali tutti concordemente lo riferiscono al pliocene, piano Astiano, per i fossili tipici che in essi si rinvencono e che caratterizzano la *facies* corallina del Messinese.

La fauna fossile, abbondantissima, rinvenuta dagli autori predetti in questo calcare, oltre che dai numerosi brachiopodi e dai polipai, avanti citati, è costituita anche, in minor proporzione, da molluschi lamellibranchi e gasteropodi, da un echino frequentissimo — *Stirechinus Scillae*, Desh. — e da numerosi denti di squali. In certe zone tali fossili sono quasi gli esclusivi componenti della roccia.

Più importante ancora, per la fauna che racchiude, è la zona ove il calcare si presenta a *facies* esclusivamente corallina e la roccia è costituita quasi per intero da coralli sia Cariofillacei che Trocociatacei sparsi qua e là

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Messina.

nella massa; sia Eupsammidi e Stilinacei, che, con le loro ramificazioni intrecciantesi, costituiscono vere barriere coralline fossili⁽¹⁾.

In questi calcari frequentemente si rinvencono delle geodette, le cui pareti sono tappezzate da piccoli ed acuti cristallini di calcite, i quali si mostrano anche nell'interno delle conchiglie dei brachiopodi, che durante la sedimentazione non furono ricolmate dalla roccia che forma il sedimento. In questi fossili si osserva sovente l'apparecchio brachiale ricoperto da un'elegante patina di limpidi cristallini di calcite.

Sulle pareti di alcune geodette del calcare a corallari osservai, associati ai soliti cristallini di calcite, altri individui alquanto più grossi, differenti per forma e splendore. Questi richiamarono ben presto la mia attenzione ed un sommario esame sulla loro forma tipica e sul loro aspetto fisico, mi indicò subito trattarsi di celestite, il che fu confermato dallo studio cristallografico.

Questa forma non frequente di giacimento, in cui la celestina si ritrova in polipai fossili, fu osservata per la prima volta a Monte Viale, ed il nostro giacimento di Tremonti presenta con quello di Monte Viale somiglianze spiccatissime, come risulta dalle descrizioni che il Reuss⁽²⁾ ed il Billows⁽³⁾, fra gli altri, hanno dato del giacimento vicentino.

I cristalli di celestina di Tremonti sono incolori, dotati di lucentezza vitrea e semi-trasparenti. Nella direzione dell'asse *a* misurano da 2 a 7 mm.: il loro spessore varia da 1 a 3 mm. Sono generalmente impiantati per un estremo dell'asse *a*, e più di rado adagiati longitudinalmente sulle pareti delle geodine nelle quali si rinvencono. Frequente è quell'ingrossamento all'estremità libera di *a*, osservato spesso sia nei cristalli dei giacimenti solfiferi siciliani che di altre località.

Le forme osservate sono le seguenti: {011} e {110}, costanti; {102} rarissima: {001} trovata una sola volta. Si hanno, perciò, le combinazioni:

$$\{011\} \{110\} — \{011\} \{110\} \{102\} — \{011\} \{110\} \{001\}.$$

(1) La fauna di questo piano del pliocene messinese, come quella degli altri piani, fu esaurientemente studiata da G. Seguenza (*Stud. stratigraf. s. formaz. pliocen. d. It. merid.*, loc. cit., pp. 181 e seg.), il quale illustrò in monografie separate i corallari (*Disquisizioni paleontologiche intorno ai corallari fossili delle rocce terziarie del distretto di Messina*. Mem. d. R. Acc. d. Sc. d. Torino, vol. II, Torino, 1864), ed i brachiopodi (*Studi paleontologici sui Brachiopodi terziari dell'Italia meridionale*. Boll. Malac. ital., Pisa, 1873, e *Paleontologia malacologica delle rocce terziarie del distretto di Messina: Classe Brachiopodi*. Mem. d. Soc. It. d. Sc. Nat., Milano, 1865); e nelle cui opere sovente è citata la località di Tremonti, di S. Iachino e delle regioni circostanti.

(2) Reuss, *Die fossilen Anthozoen der Schichten von Castel Gomberto*. Denkschr. k. Akad. d. Wiss., vol. 28, Wien, 1868.

(3) Billows, *Sulla celestite di Monte Viale nel Vicentino*. Rivista di Min. e Crist. ital., vol. XXXI.

Nel cristallo che presentava quest'ultima, fu notata anche una faccetta strettissima, riflettente un'immagine semplice, sbiadita, a contorni indefiniti, e lievemente spostata dalla zona $[100]$. In base all'angolo che essa fa con (011) , si può dedurre che essa può identificarsi con il prisma $\{023\}$, trovato da Websky nel 1857 nella celestite di Pschow, ma non rinvenuta finora nei cristalli di Sicilia:

$$(011): (023) = 10^{\circ} 51' \text{ mis.} \quad 11^{\circ} 31 \frac{1}{2}' \text{ calc.}$$

In migliore accordo con la misura starebbe il simbolo, poco probabile, di una forma nuova $\{0.15.22\}$, per la quale si calcola

$$(011): (0.15.22) = 10^{\circ} 53'.$$

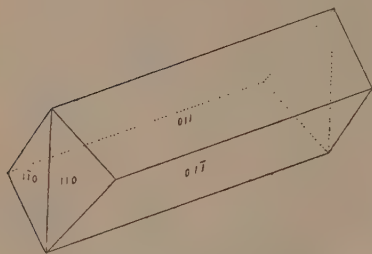


FIG. 1.

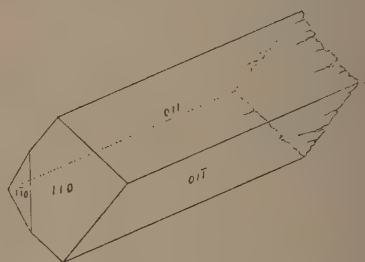


FIG. 2.

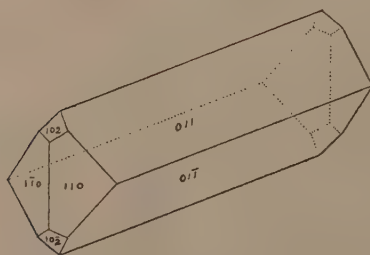


FIG. 3.

I cristalli di celestite di Tremonti sono sempre allungati nella direzione dell'asse a e prismatici secondo il prisma $\{011\}$: le figure 1-3 danno un'idea del loro habitus.

Spesso le faccie presentano la poliedria e le altre irregolarità ben note nella celestite. I cristallini più piccoli permettono, però, qualche volta, esatte misure, le quali vanno particolarmente d'accordo con le costanti di Dauber, come risulta dalla seguente tabella:

ANGOLI	Numero	MISURATI		CALCOLATI						
		Limiti	Medie	Sicilia					Herren- grund	Monte Viale
				Ranfaldi	Dauber	Auerbach	Kokskarou	Di Franco	Auerbach	Billows
(011):(01I)	5	75.49' — 76. 8'	75.57'	0' — "	75.53.27"	75.53.42"	75.52.34"	75.51.10"	75.51.43"	76. —.41"
(110):(1I0)	4	75.40 — 75.48	75.42	—	75.45.42	75.56.—	75.56.10	75.57. 6	75.50. 1	76. 5.49
(102):(011)	1	—	61.39	61.39.12	61.40.25	61.37.57	61.38.34	61.39. 8	61.35.51	61.31.46
(102):(110)	2	59.49 — 59.51	59.50	59.51. 5	59.51.57	59.58. 3	59.57.44	59.57.50	59.56.42	60. 6.14
(011):(110)	5	60.47 — 61.26	61.6	61. 4.25	61. 2.20	60.58.44	60.58.25	60.57.47	61. 2. 9	60.56.45

(1)

Gli angoli calcolati da me sono dedotti dal rapporto parametrico

$$a:b:c = 0.7771:1:1.2811.$$

Biologia. — *I processi di inibizione differenziale nella regione olfattoria degli Anfibi Anuri* ⁽¹⁾. Nota del dott. GIULIO COTRONEI, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI.

Nei miei studi, finora pubblicati, sulle « larve a litio » degli Anfibi, ho già reso noto che la regione olfattoria come appartenente alla parte precordale della testa risente intensamente il processo inibitore. Ricordo che fin dal 1915 pubblicai che la tendenza a fondersi delle narici è il fatto che prima s'incontra nella seriazione degli stadi malformativi.

Con la presente Nota mi propongo di riferire pochi reperti i quali, però, debbono servire a vieppiù avvalorare l'interpretazione causale da me data alla morfologia della testa, interpretazione causale che secondo me non è poi altro che il collegamento obbiettivo dei varî fatti studiati nelle loro relazioni.

Ho descritto altrove come il fatto essenziale che caratterizza il cervello precordale di quelle larve, le quali avendo risentito l'azione paralizzante del cloruro di litio hanno tuttavia potuto proseguire nel loro sviluppo, sia la dissociazione dei processi morfogenetici elementari del Ruffini: le divisioni cellu-

(1) Il Billows, loc. cit., per l'angolo (011):(01I) dà il valore teorico di 75° 47' 33". Dal calcolo fondato sulle costanti definitive dello stesso Billows a me risulta invece il valore sopra riportato.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

lari, infatti, sono state ostacolate meno che le funzioni di movimento e di secrezione. La conseguenza è una minore occupazione di spazio, necessario sia al normale sviluppo cerebrale, sia allo sviluppo di quelle parti che vengono *sostenute e dirette* dallo sviluppo del cervello precordale. E specialmente nello studiare il vestibolo boccale delle larve a litio degli Anfibi Anuri che ho potuto far risaltare con la massima evidenza questi processi di inibizione differenziale (Cotronei, 1915, 1919, 1921).

I medesimi processi di inibizione differenziale dovuti alla stessa natura causale si riscontrano nello studio dell'organo olfattivo.

Gradatamente, seriando i vari reperti si osserva, data la minore occupazione di spazio cefalico, che gli organi olfattivi sono spinti sulla linea mediana presentando uno sbocco comune, si verifica cioè l'inibizione progressiva della parte mediale anteriore.

Anche però, la parte caudale presenta prontamente i processi inibitivi. Infatti io non riscontro la comunicazione naso-boccale (coane). In un dato grado del processo malformativo, quando però c'è ancora una notevole parte del territorio olfattorio, io osservo la inibizione del nervo olfattivo ⁽¹⁾, che secondo alcuni autori, in base a ricerche sperimentali, avrebbe, non origine cerebrale, ma dall'abbozzo olfattivo.

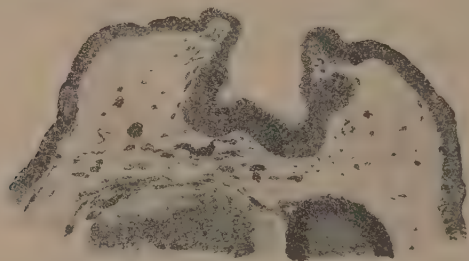


FIG. 1. — Larva a litio di *Bufo vulgaris* (Koristka obbiettivo 4 oculare 1). La figura mostra un solo occhio laterale per il fatto che la sezione è obliqua.

La fig. 1 mostra una sezione frontale ma piuttosto obliqua lateralmente di una larva a litio di *Bufo vulgaris* nella quale i due occhi sono ancora laterali, ma la regione olfattiva è già notevolmente interessata dal processo malformativo. Si vede un organo olfattivo mediano derivato dalla fusione dei due abbozzi olfattivi. Si osserva lateralmente differenziata l'appendice

⁽¹⁾ La inibizione dei nervi olfattivi come quella dei nervi ottici, che ho anche riscontrato in determinate larve a litio, mettono in evidenza l'importanza delle condizioni di spazio per la produzione delle fibre nervose sopra tutto, per il nostro studio, nella regione mediana del cervello anteriore.

laterale che è inoltre una *formazione dorsale* dell'abbozzo olfattivo. Nella figura si scorge solo l'appendice di un lato; non si vede, ma è ugualmente differenziata, l'appendice dell'altro lato. Richiamo l'attenzione del lettore sul fatto che è assai bene evidente la cavità dell'organo olfattivo mediano.

La fig. 2 si riferisce a una larva a litio ciclope di *Rana esculenta*.

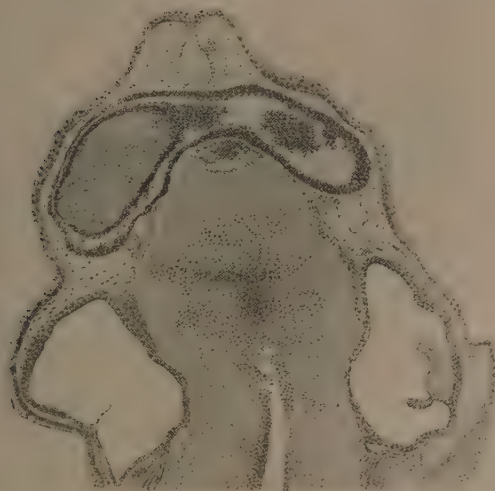


FIG. 2. Larva a litio di *Rana esculenta* in cui il processo malformativo è più accentuato estendendosi alla regione oculare con la produzione della ciclopia; gli organi uditivi invece sono in posizione normale (Koristka obbiettivo 4 oculare 4 comp. la figura è riprodotta ridotta di $\frac{1}{10}$).

Il processo malformativo anche nella regione olfattiva, è molto più avanzato che nel caso precedente. Si nota tuttavia una fossetta olfattiva mediana la quale si spinge quasi a contatto con l'occhio ciclopico. Il fatto che voglio ancora far risaltare è la presenza della cavità in questo ridottissimo organo olfattivo.

Il massimo grado malformativo, prima della completa inibizione dell'organo in esame, è una piccola fossetta nella quale io non riesco a scorgere differenziamenti olfattivi; c'è soltanto epitelio indifferente laterale).

La genesi di questi vari gradi malformativi va considerata tenendo presente i vari stadi di sviluppo normale dell'organo olfattivo. A misura che il cervello precordale si va estendendo dall'apice della corda dorsale in avanti, l'abbozzo olfattivo può occupare lo spazio che è stato *conquistato* dal cervello precordale, che agisce come un tubo turgido e quindi di sostegno: si verifica pertanto nei vari gradi di malformazione cerebrale precordale una graduale inibizione nell'organo olfattorio mediale e anche caudale ventrale

essendo le parti laterali spostate sulla linea mediana per la inibizione di spazio apicale e mediano.

Ritengo inoltre di vedere nelle malformazioni dell'organo olfattivo un comportamento molto differente circa i processi morfogenetici elementari di Ruffini che non nel cervello precordale.

La Marchetti ha, a parer mio, esaurientemente dimostrato che anche nello sviluppo dell'abbozzo olfattivo si attuano i processi morfogenetici elementari di Ruffini; ora i miei reperti avanti descritti nei quali si nota la conservazione di una cavità, mi sembra che dimostrino che il movimento e la secrezione cellulare non sono stati ostacolati come nel cervello precordale.

Le brevi osservazioni e considerazioni esposte nella presente Nota servono vieppiù ad accertare l'influenza direttrice del cervello precordale sugli organi circostanti, e a fare risaltare il ritmo delle condizioni di tempo e di luogo per lo sviluppo organico.

Da principio è il cervello precordale che deve subito occupare il maggior spazio possibile e l'ottiene, soprattutto con le funzioni di movimento e di secrezione (con la produzione di liquido encefalico). Questo tubo turgido e dilatato può ora dar modo agli altri organi di svilupparsi. In questi organi che sono così *diretti*, i processi morfogenetici sono meno ostacolati perchè essi entravano in azione più tardi che non quando più agiva l'azione paralizzante. *Le inibizioni che in essi si riscontrano sono pertanto più passive.*

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 maggio 1922.

- Archivio italiano di anatomia e di embriologia, vol. XVIII dedicato al prof. Giulio Chiarugi dai suoi discepoli nel XXXV anno del suo insegnamento. Firenze, 1922. 8°, pp. I-XXVIII, 1-575.
- BRUTTINI A. — Ramassage et utilisation des déchets et résidus pour l'alimentation de l'homme et des animaux pour les engrais et les industries agricoles (1914-1920). Rome, 1922. 8°, pp. 1-336.
- D'AQUINO L. — Il fondamento, il contenuto, le conseguenze della nuova teoria della relatività. Napoli, 1922. 8°, pp. 1-18.
- D'AQUINO L. — La decomposizione delle righe spettrali per effetto del campo elettrico. Napoli, 1922. 8°, pp. 1-86.
- DE MONTESSUS DE BALLORE R. — Notice sur les travaux scientifiques. Paris, 1922. 4°, pp. 1-37.
- ENRIQUES F. — Per la storia della logica. Bologna, s. d. 8°, pp. 1-296.
- FAVARO A. — L'attività del sole nell'anno 1921. Catania, 1922. 8°, pp. 1-20.
- GALLARDO A. — Algunos casos de teratología vegetal, fasciación, proliferación y sinantia (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo VI, pp. 37-45). Buenos Aires, 1898. 8°.
- GALLARDO A. — XXVº aniversario de la Sociedad científica Argentina (Extr. da « Anales de la Sociedad científica Argentina », tomo XLIV). Buenos Aires, 1897. 8°, pp. 1-15.
- GALLARDO A. — Bipolaridad de la división celular (Extr. de la « Revista del Museo de la Plata », tomo XVI). Buenos Aires, 1909. 8°, pp. 1-31.
- GALLARDO A. — El mirmecofilo sinfilo *Fustiger elegans* Raffray (Extr. da « Physis », tomo II, pp. 254-257). Buenos Aires, 1916. 8°.
- GALLARDO A. — Essai d'interprétation des figures karyokinétiques (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo V, pp. 11-21). Buenos Aires, 1896. 8°.
- GALLARDO A. — Hormigas del Neuquén y Rio Negro (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXX, pp. 243-254). Buenos Aires, 1919. 8°.
- GALLARDO A. — Hormigas dolicoederinas de los Andes de Mendoza (Extr. da « Physis », tomo IV). Buenos Aires, 1918. 8°, pp. 1-4.
- GALLARDO A. — Invernada de las orugas de *Morpho Catenarius* (Perry) (Extr. da « Anales de la Sociedad Científica Argentina », tomo LXIV). Buenos Aires, 1908. 8°, pp. 1-6.
- GALLARDO A. — La destrucción de la langosta por sus enemigos naturales (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXIII, pp. 155-165). Buenos Aires, 1912. 8°.
- GALLARDO A. — La division de la cellule phénomène bipolaire de caractère électro-colloïdal (Sonderabdr. aus dem « Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen », Band XXVIII, pp. 125-156). Leipzig, 1909. 8°.
- GALLARDO A. — La riqueza de la flora Argentina (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo VIII, pp. 239-339) Buenos Aires, 1902. 8°.

- GALLARDO A. — Las hormigas de la Republica Argentina subfamilia dori-linas (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXX, pp. 281-410), Buenos Aires, 1920. 8°.
- GALLARDO A. — Las hormigas de la Republica Argentina subfamilia pone-rinas (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXX), Buenos Aires, 1918. 8°, pp. 1-111.
- GALLARDO A. — Les études zoologiques dans la République Argentine (Extr. da la « Revista de la Universidad de Buenos Aires », tomo VIII). Buenos Aires, 1907. 8°, pp. 1-14.
- GALLARDO A. — Notas acerca de la hormiga *Trachymyrmex Pruinosus* Emery (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXVIII, pp. 241-252). Buenos Aires, 1916. 8°.
- GALLARDO A. — Notas complementarias sobre las Dolicoderinas Argentinas (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXVIII, pp. 257-261). Buenos Aires, 1916. 8°.
- GALLARDO A. — Notas de teratologia vegetal (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo IX, pp. 525-537). Buenos Aires, 1903. 8°.
- GALLARDO A. — Notas sobre la anatomia del aparato espiracular, laringe y hioides de dos delfines: *Phocaena Dioptrica* Lahille y *Lagenorhynchus Fitzroge* (Waterhouse) Flower (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXIV, pp. 235-246). Buenos Aires, 1913. 8°.
- GALLARDO A. — Notes systématiques et éthologiques sur les fourmis attines de la République Argentine (Extr. da Anales del Museo Nacional de Historia natural de Buenos Aires », tome XXVII, pp. 317-344). Buenos Aires, 1916. 8°.
- GALLARDO A. — Observaciones morfológicas y estadísticas sobre algunas anomalias de *Digitalis purpurea* L. (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Buenos Aires », tomo VII, pp. 37-72). Buenos Aires, 1900. 8°.
- GALLARDO A. — Observaciones sobre algunas hormigas de la Republica Argentina (Extr. da « Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires », tomo XXVII). Buenos Aires, 1915. 8°, pp. 1-35.
- HELGUERO (DE) F. — In memoriam (Benini, Gallardo, Reina, Sergi, Volterra). Roma, 1911. 8°, pp. 1-35.
- IVALDI G. — Sull'errore fondamentale della teoria della relatività del tempo e dello spazio di Alberto Einstein (Estr. dalla « Rivista L'Industria », vol. XXXV). Varese, 1921. 8°, pp. 1-11.
- MASCARELLI L. — Commemorazione di Giacomo Ciamician letta nell'Aula Magna del R. Politecnico di Torino. Torino, 1922. 8°, pp. 1-21.
- MESCHINELLI L. — Su di un frutto fossile dell'eocene inferiore vicentino (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXX, p. 1025-1032). Venezia, 1921. 8°.
- PICARD E. — La vie et l'oeuvre de Pierre Duhem. Paris, 1921. 4°, pp. 1-44.
- QUARTAROLI. — Elementi di chimica generale ed inorganica. Pisa, 1922. 8°, pp. 1-305.
- SAENZ PEÑA R. — Escritos y discursos. Buenos Aires, 1914. 8°, pp. 1-476.
- UNGANIA E. — Einstein e la sua relatività, esame critico: l'errore copernicano. Bologna, 1922. 8°, pp. 1-ix, 1-210.
- UNGANIA E. — Sulla teoria elettromicroenergonica. Bologna, 1922. 16°, pp. 1-15.
- VELASCA DE PAUDA M. — Nota sobre las energias no integrables (Congreso de Oporto). Madrid, 1921. 8°, pp. 1-9.

